$GE \parallel IF \parallel HF$

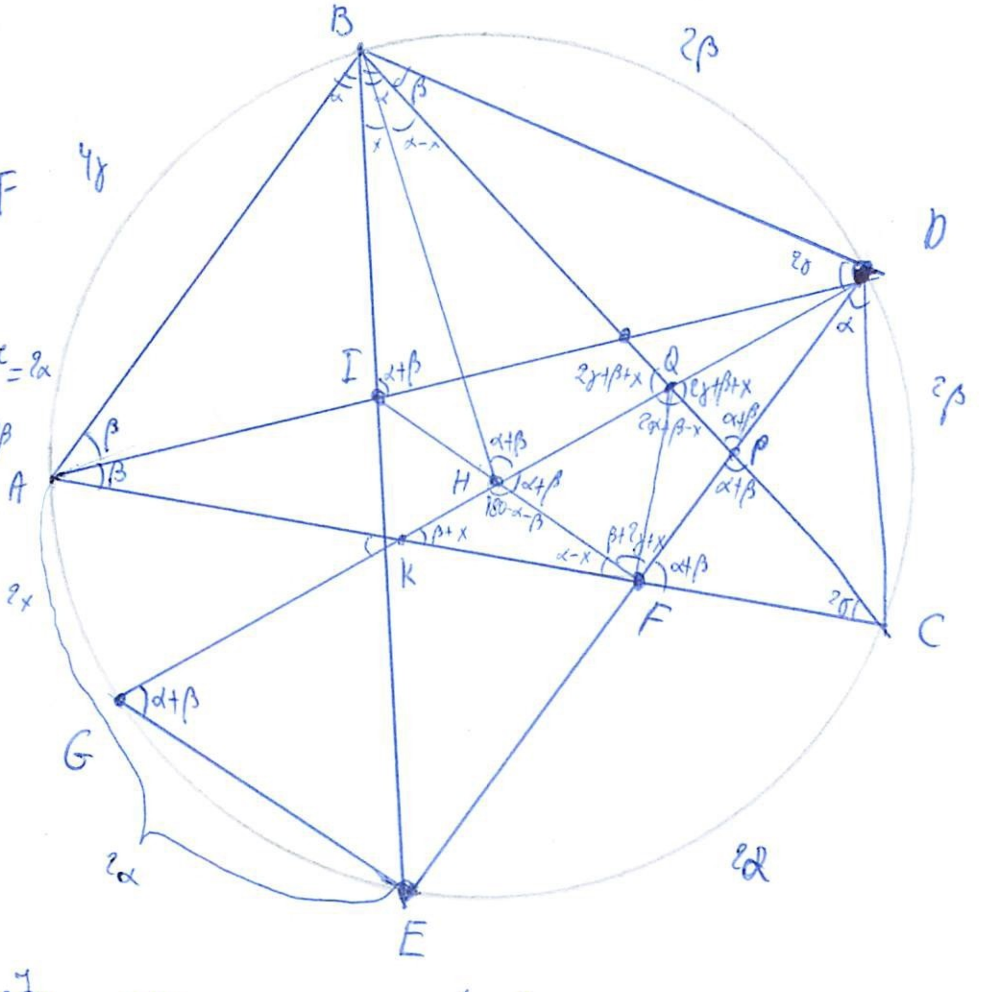
$\breve{AG} = 2x$

$\breve{AE} = \breve{EC} = 2\cdot\frac{\angle ABC}{2} = 2\alpha$

$\breve{BD} = \breve{DC} = \frac{\angle BAC}{2}\cdot 2 = 2\beta$

$\breve{AB} = 2\cdot\angle BCA = 4\gamma$

$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180$




ვიპოვე ჩვენი დავთვალოთ კუთხეები.

$\angle CBD = \frac{\breve{DC}}{2} = \beta$; $\angle EGD = \frac{\breve{EC}+\breve{DC}}{2} = \alpha+\beta$; $HF \parallel GE \Rightarrow \angle DHF = \angle DGE = \alpha+\beta$;

$\angle DFC = \frac{\breve{DC}+\breve{AE}}{2} = \alpha+\beta$; $\angle EPC = \frac{\breve{BD}+\breve{EC}}{2} = \alpha+\beta$; $\angle DKC = \frac{\breve{DC}+\breve{AG}}{2} = \beta+x$

$\angle KHF = 180 - \angle DHF = 180 - \alpha - \beta$; $\angle HFK = 180 - \angle KHF - \angle HKF = \alpha - x$;

$\angle HFD = 180 - \angle HFK - \angle DFC = \beta + 2\gamma + x$; $\angle BQG = \dfrac{\breve{AB} + \breve{AG} + \breve{DC}}{2} = 2\gamma + \beta + x$.

$\angle HQP = 180 - \angle BQG = 2\alpha + \beta - x$ ($\square HQPH$ ჩაწერილია).

$\angle IHD = 180 - \angle DHF = 180 - \alpha - \beta \Rightarrow \square IBDH$ ჩაწერილია $\Rightarrow \angle BHD = \angle BID = \alpha + \beta$

დავაკვირდეთ $\Delta HFD$ და $\Delta HBQ$-ს. მათი 3-ვე კუთხე ტოლია $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta HBQ \sim \Delta HDF \Rightarrow \dfrac{BH}{HQ} = \dfrac{DH}{HF} \Rightarrow \dfrac{BH}{DH} = \dfrac{HQ}{HF}$.

დავაკვირდეთ $\Delta BHD$ და $\Delta QHF$-ს. $\left\{\begin{array}{l} \angle BHD = \angle QHF \\ \dfrac{BH}{DH} = \dfrac{HQ}{HF} \end{array}\right. \Rightarrow \Delta BHD \sim \Delta QHF$

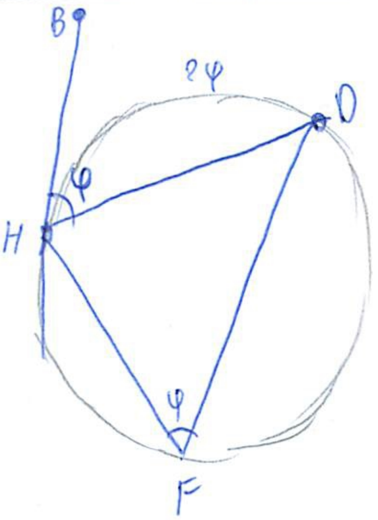
$\Delta BHD \sim \Delta QHF \Rightarrow \angle HQF = \angle HBD = \alpha + \beta - x$.

$\angle FQC = \angle HQC - \angle HQF = 2\alpha + \beta - x - (\alpha + \beta - x) = \alpha$

$\angle EDC = \dfrac{\breve{EC}}{2} = \alpha$;

$\angle EDC = \angle FQC \Rightarrow \square FQDC$ ჩაწერილია $\Rightarrow \angle DQC = \angle DFC \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + \beta = \beta + 2\gamma + x \Rightarrow \angle BHD = \angle HFD$




რადგან $\angle BHD = \frac{\overset{\frown}{HD}}{2} \Rightarrow BH$ არის HDF სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მხები.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

25.04.2015/ მათ/III/ 614

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

$f: (0;1) \to (0;1)$

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{თუ } 0<x<\frac{1}{2} \\ x^2 & \text{თუ } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$a_0 = a$; $b_0 = b$. $a_n = f(a_{n-1})$ ; $b_n = f(b_{n-1})$ . $0<a<b<1$.

$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$. უ.დ. $\exists$ ისეთი $n \in N$ რიცხვი.

თუ $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_n < a_{n-1} \\ b_n > b_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le a_{n-1} < 1 \\ 0 < b_{n-1} < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a_n > a_{n-1} \\ b_n < b_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a_{n-1} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \le b_{n-1} < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

(f(x)-ის განსაზღვრის თანახმად $f(x) > x$ თუ $0<x<\frac{1}{2}$ ; $f(x) < x$ თუ $\frac{1}{2} \le x < 1$ $(b_n = f(b_{n-1}); a_n = f(a_{n-1}))$)

დავუშვათ ისეთი n არ არსებობს. ანუ არ არსებობს n რომლისთვისაც $a_n$ და $b_n$ $(0;1)$ შუალედის სხვადასხვა ნახევარში $(0;\frac{1}{2});[\frac{1}{2};1)$. მაშინ ისინი ყოველთვის ერთ და იმავე ნახევარშია. მაშინ განვიხილოთ სხვაობა $b_n - a_n = d$.

შევნიშნოთ რომ თუ რომელიმე $n$-ზე $a_n<\frac{1}{2}$ და $b_n<\frac{1}{2}$ მაშინ $n+1$-ზე ისინი უკვე მეორე ნახევარში აღმოჩნდებიან რადგან $f(a_{n+1}) = a_n+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$; $f(b_{n+1}) = b_n+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. ანუ $a_n$ და $b_n$ ყოველ მეორე ნაბიჯზე მაინც აღმოჩნდებიან მეორე ნახევარში.

1) თუ $a_n$ და $b_n$ არიან პირველ ნახევარში:

$d_1 = b_n - a_n$; $b_{n+1} = f(b_n) = b_n + \frac{1}{2}$; $a_{n+1} = f(a_n) = a_n + \frac{1}{2}$

$d_2 = b_{n+1} - a_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} - (a_n + \frac{1}{2}) = b_n - a_n = d_1$.

ანუ ამ შემთხვევაში $d$ არ იცვლება

2) თუ $a_n$ და $b_n$ არიან მეორე ნახევარში:

$d_1 = b_n - a_n$; $d_2 = b_{n+1} - a_{n+1} = f(b_n) - f(a_n) = b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) =$

$= d_1(b_n + a_n) > d_1$ რადგან $a_n \neq b_n$ და $a_n$ და $b_n \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_n + b_n > 1$ ($a_n \neq b_n$ იმიტომ რომ $b > a$ და $d$ არასდროს მცირდება ამიტომ ვერასდროს გახდება $0$)

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

25.04.2015/ მათ/III/ 614

ამოცანა № 2

გვერდი № 3

ანუ $d$ ყოველთვის იზრდება (ზრდიმე ყოველ ორის სვლაზე) რადგან $a_n$ და $b_n < 1$ ყოველთვის $d$ ვერ გასცდება 1-ზე მეტი, ანუ $d$ შემოსაზღვრულია, მაგ $d$ უსასრულოდ იზრდება ანუ $d$-ს გააჩნია ზღვარი $A$, რომელსაც უსასრულოდ უახლოვდება. დავუშვათ რომელიღაც $n$-ზე $d = A - \varepsilon$. $\varepsilon$ ძალიან მცირე ავიღოთ.

~~...~~ თუ $a_{n+1}$ და $b_{n+1}$ არიან ნახევარში $d$ იქნება ორჯერ და გაიზრდება. (განვიხილოთ $a_{n+1}$ და $b_{n+1}$ ორივე ნახევარში)

$$d' = b_{n+1} - a_{n+1} = b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) = d\,(b_n + a_n) = (A-\varepsilon)(b_n+a_n)$$
$$= A(b_n + a_n) - \varepsilon(b_n + a_n)$$ სადაც $\varepsilon \cdot (b_n + a_n)$ ძალიან მცირე რიცხვია $A$-სთან შედარებით.

დავუშვათ 1) $b_n + a_n \geq \sqrt2 \Rightarrow d' \geq A\sqrt2 - \varepsilon\sqrt2 > A$ ($\varepsilon$ ძალიან მცირეა)

2) $b_n + a_n < \sqrt2 \Rightarrow$ 1) $b_n \geq \frac{\sqrt2}{2}$ $a_n < \frac{\sqrt2}{2}$ ან 2) $b_n < \frac{\sqrt2}{2}$ $a_n < \frac{\sqrt2}{2}$.

1) $b_{n+1} = b_n^2 \geq \frac12$ ; $a_{n+1} = a_n^2 < \frac12$ (სხვადასხვა ნახევრებში არის წინააღმდეგობა).

2) $b_{n+1} = b_n^2$ $\left(\frac14 \leq b_{n+1} < \frac12\right)$ $a_{n+1} = a_n^2$ $\left(\frac14 \leq a_{n+1} < \frac12\right)$ ($\geq \frac14$ რადგან $a_n \geq \frac12$)

$b_{n+2} = b_{n+1} + \frac12 \geq \frac34$ ; $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac12 \geq \frac34$

$\boxed{6}$

$a_{n+2} \ge \frac{3}{4}$ ; $b_{n+2} \ge \frac{3}{4}$ განვიხილოთ $b_{n+3}-a_{n+3}$.

$$d''' = b_{n+3} - a_{n+3} = b_{n+2}^2 - a_{n+2}^2 = \overbrace{(b_{n+2}-a_{n+2})}^{\ge A-\varepsilon}\overbrace{(a_{n+2}+b_{n+2})}^{\ge 1,5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow d''' \ge 1,5A - 1,5\varepsilon > A$ ანუ $d$-ს ზღვარი არ გაჩნია, რაც წინააღმდეგობაა, ანუ ჩვენი დაშვება რომ $a_n$ და $b_n$ ყოველთვის ერთ ნახევარშია მცდარი იყო, ანუ არსებობს $n$, რომლისთვისაც $a_n$ და $b_n$ სხვადასხვა ნახევარშია, ანუ

$(a_{n+1}-a_n)$ და $(b_{n+1}-b_n)$ სხვადასხვა ნიშნისაა

ანუ $(a_{n+1}-a_n)\cdot(b_{n+1}-b_n) < 0$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 17

25.04.2015/ მათ/III/ 6/14

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$x; y \in \mathbb{Z}$

$7x^2 - 13xy + 7y^2 = ((x-y)+1)^3$.

განტოლება სიმეტრიულია $x$ და $y$-ის მიმართ ამიტომ ზოგადობის დაუკლებლად ჩავთვალოთ რომ $x > y$ ხოლო შემდეგ ყველა ამონახსნს სადაც $x \neq y$ ჩავთვლით 2-ჯერ.

$$7x^2 - 13xy + 7y^2 = (x-y+1)^3 \Rightarrow 7(x-y)^2 + xy = (x-y+1)^3.$$

დავუშვათ $\begin{cases} x-y=p \\ x+y=q \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{p+q}{2} \cdot \frac{q-p}{2} = \frac{q^2-p^2}{4}$

$$7p^2 + \frac{q^2-p^2}{4} = (p+1)^3$$

$$27p^2 + q^2 = 4p^3 + 12p^2 + 12p + 4$$

$$4p^3 - 15p^2 + 12p + 4 = q^2 \Rightarrow 4(p^3 - 3p^2 + 3p - 1) + 8 - 3p^2 = q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(p-1)^3 - 3(p-1)^2 - 6p + 11 = q^2 \Rightarrow 4(p-1)^3 - 3(p-1)^2 - 6(p-1) + 5 = q^2$$

ამ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია $p=0; q=\pm 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=1; y=1$ ან $x=-1; y=-1$.

8